

Feuille 6

Déterminants et inversion

Il y a plusieurs types d'exercices : les exercices dits « de calculs » – marqués par un (C) – que vous devez pouvoir traiter en autonomie et sans erreur : des questions de ce type seront posées à l'examen.

Corrigé Exercice 1. (déterminant 2x2) Soit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pour $(e_1, e_2) \in \mathbb{R}^2$, on définit $(\mathcal{S}_{(e_1, e_2)}) : \begin{cases} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{cases}$

1. Il suffit de résoudre $(\mathcal{S}_{(e_1, e_2)})$ sans faire d'hypothèse particulière sur e_1 et e_2 . On a : $\begin{cases} ax + by = e_1 \\ cx + dy = e_2 \end{cases}$
- Si $a = 0$: On ne peut avoir $b = 0$ car alors on aurait $e_1 = 0$. Ainsi, $b \neq 0$ et on peut s'en servir comme pivot en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{d}{b}L_1$

$$\begin{cases} by = e_1 \\ cx = e_2 - \frac{d}{b}e_1 \end{cases} \quad (1)$$

Comme on ne fait aucune hypothèse sur (e_1, e_2) , on doit donc avoir $c \neq 0$. Récapitulons : Si $a = 0$, on doit avoir $bc \neq 0$ et $\begin{cases} y = e_1/b \\ x = (be_2 - de_1)/bc \end{cases}$

- Si $a \neq 0$: on s'en sert comme pivot en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{c}{a}L_1$:

$$\begin{cases} ax + by = e_1 \\ (d - \frac{c}{a})y = e_2 - \frac{c}{a}e_1 \end{cases} \quad (2)$$

On doit donc avoir $d \neq \frac{c}{a}$ (sinon $e_2 - \frac{c}{a}e_1 = 0$) ou, en multipliant par a : $\det = ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, en faisant $L_2 \leftarrow (a/\det)L_2$ et $L_1 \rightarrow (1/a)L_1$, on a

$$\begin{cases} x + (b/a)y = (b/a)e_1 \\ y = \frac{1}{\det}(ae_2 - ce_1) \end{cases} \quad (3)$$

Puis, en faisant $L_1 \leftarrow L_1 - (b/a)L_2$, après simplification : $\begin{cases} x = \frac{1}{\det}(de_2 - de_1) \\ y = \frac{1}{\det}(ae_2 - ce_1) \end{cases}$ Remarquons que

la condition est la solution marchent aussi dans le cas $a = 0$

2. Les lignes de A sont colinéaires ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $a = \lambda c, b = \lambda d$ (ou l'inverse). Si $\lambda = 0$, on a une ligne nulle. Sinon, en multipliant et en simplifiant par λ , on obtient $ad = bc$. Réciproquement, si $ad = bc$, soit tout le monde est nul (et les deux lignes sont bien colinéaire), soit on a par exemple $d \neq 0$ et alors, en posant $\lambda = b/d$, on a : $a = \lambda c, b = \lambda d$.

La condition est donc $ad - bc \neq 0$.

Sous cette condition, on peut tenter d'inverser la matrice par une résolution de système et on obtient,

d'après 1. : $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Corrigé Exercice 2 (Systèmes linéaires et déterminant). On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ Faisons $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$. On obtient : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ puis en développant par rapport

à la première colonne : $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1$. A est donc inversible, et le système à l'unique solution

$X = A^{-1}B$

2. On a $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$. En développant par

rapport à la troisième ligne, on obtient : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ et en redéveloppant par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \text{ Même conclusion que précédemment.}$$

3. Développons $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix}$ par rapport à la deuxième ligne. On obtient le polynôme en x :

$$-\begin{vmatrix} 4 & 16 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} 1 & 16 \\ 1 & 25 \end{vmatrix} - x^2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 9x + x^2 \quad (4)$$

Soit on le factorise de manière classique, soit on remarque que pour $x = 4$ et $x = 5$ le déterminant est nul. 4 et 5 sont donc des racines du polynôme puis :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & x & x^2 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = -(x-4)(x-5) \quad (5)$$

Corrigé Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. On prend le 1 de la première colonne pour pivot et on effectue $L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ pour obtenir : $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

On prend maintenant le 1 de la deuxième colonne pour pivot en faisant $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

On a alors : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On termine en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ puis $L_3 \leftrightarrow L_1$ et on obtient l'identité.

2. On trouve $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

3. On a $AA' = I_3$ donc $A' = A^{-1}$. Le fond théorique de cette méthode, c'est que faire des opérations (autorisées) sur les lignes revient à multiplier par une matrice (invertible). Appelons $P_1, P_2, \dots, P_k$ les matrices correspondant aux opérations sur A . On trouve alors $P_k \cdots P_2 P_1 A = I_3$ donc $P_k \cdots P_2 P_1 = A^{-1}$. Appliquer les mêmes opérations sur la matrice identité revient à calculer $P_k \cdots P_2 P_1 I_3 = A^{-1}$.

Corrigé Exercice 4. • $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2(2-8) - 6(4-6) = 0$

en développant par rapport à la deuxième ligne. On en déduit que A n'est pas inversible.

• $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -(-1) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (8-12) + (4+3) = 3 \neq 0$ en développant par rapport à la deuxième ligne.

Comme A est inversible, on continue : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$ en faisant $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_3 \leftarrow$

$$L_3 - L_2 : \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right).$$

Ensuite, on fait $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et $L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3$: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 0 & 4 & 7 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right)$.

On termine par $L_1 \leftarrow \frac{1}{3}L_1$, $L_2 \leftarrow -L_2 + L_1$ puis $L_2 \leftrightarrow L_1$: $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 4/3 & 4/3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 4/3 & 7/3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right)$. Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & 4/3 & -1 \\ 4/3 & 7/3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \text{ On a } \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \text{ en développant par}$$

rapport à la première colonne. On a ensuite : $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 18$.

$$\text{On a aussi : } \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -27 + 28 + 34 = 35$$

Du coup : $\det(A) = 2 \times 18 - 35 = 1 \neq 0$ donc la matrice est inversible.

$$\text{On doit trouver } A^{-1} = \begin{pmatrix} 18 & -35 & -28 & 1 \\ 9 & -18 & -14 & 1 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ -12 & 24 & 19 & -1 \end{pmatrix}$$

Corrigé Exercice 5.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1. \text{ On trouve } \det = -3 \text{ et } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2. A + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } (A + I_4)^2 = 4(A + I_4)$$

$$3. \text{ On a } A^2 + 2A + I_4 = 4A + 4I_4 \text{ puis } A^2 - 2A = 3I_4 \text{ puis } A(A - 2) = 3I_4. \text{ On en déduit que } A \text{ est inversible, d'inverse } \frac{1}{3}(A - 2)$$

Corrigé Exercice 6. En développant successivement, on trouve $\det(A) = a_1 a_2 \dots a_n$ qui est non nul ssi tous les a_i sont non nuls.

Corrigé Exercice 7 (Déterminant de Vandermonde). Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$, on considère le déterminant :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer la formule : $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

1. Le déterminant est nul car la matrice n'est pas inversible avec deux colonnes identiques, et la formule est nulle aussi.
2. Le calcul est simple.
3. On fait $L_i \leftarrow L_i - a_1 L_{i-1}$ avec $i = n$ puis $i = n - 1$ jusqu'à $i = 2$:

$$V(a_1, \dots, a_n) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & (a_2 - a_1)a_2 & \cdots & (a_n - a_1)a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & (a_2 - a_1)a_2^{n-2} & \cdots & (a_n - a_1)a_n^{n-2} \end{pmatrix} \quad (6)$$

En factorisant chacune des lignes par $a_i - a_1$ et en développant par rapport à la première colonne, on obtient le résultat souhaité.

4. On raisonne sur n . L'initialisation a été faite à la question 2. Pour l'hérédité, il suffit d'utiliser la formule précédente et d'appliquer l'hypothèse de récurrence.
5. (*) Le coefficient devant X^{n-1} est $(-1)^n V(a_2, \dots, a_n)$. Le polynôme s'annule en quand $X = a_i$ donc a $n - 1$ racines évidentes. On a donc $V(X, a_2, \dots, a_n) = (-1)^{n-2} V(a_2, \dots, a_n)(X - a_2) \cdots (X - a_n)$ ce qui nous redonne la formule en 3.

Corrigé Exercice 8. Notons $P = c_0 + c_1 X + \cdots + c_p X^p$. La condition s'écrit $VC = Y$ avec $C = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$,

$Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^p \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_p & \cdots & x_p^p \end{pmatrix}$. Le système a une solution pour tout Y ssi V est inversible ssi les x_i sont distincts (d'après l'exercice précédent)

Corrigé Exercice 9. $A = \begin{pmatrix} 2 - X & -3 & -6 \\ 0 & 5 - X & 6 \\ -1 & -5 & -5 - X \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}[X])$.

On trouve $\det(A) = X^3 - 2X^2 - X + 2 = (X - 1)(X^2 - X - 2)$ (en remarquant que 1 est racine) puis $P = (X - 1)(X - 2)(X + 1)$.

Si $P(\lambda) = 0$, cela signifie que $\begin{pmatrix} 2 - \lambda & -3 & -6 \\ 0 & 5 - \lambda & 6 \\ -1 & -5 & -5 - \lambda \end{pmatrix}$ est non-inversible. Elle est inversible partout ailleurs.

Corrigé Exercice 10. $B = \begin{pmatrix} -2 - X & -1 & -4 & -2 \\ 5 & 4 - X & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 - X & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -X \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}[X])$.

On trouve comme polynôme : $X^4 - 3X^3 + X^2 + 3X - 2 = (X - 2)(X - 1)^2(X + 1)$